工業力学A

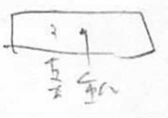
2010年7月26日
8:45~10:15
物216，物315

[1], [2]は4枚綴り，[3]は2枚綴りの用紙に解答すること．
[1], [2]については，問題毎に解答用紙を変えること．

[1] 質点mが原点に向かう引力$F=C/r^2$の作用を受けて運動している．ここで，rは原点と質点の距離，Cは正の定数である．

(1) 質点の位置を極座標，$x=r\sin\varphi$，$y=r\cos\varphi$で表現するとき，質点の運動エネルギーTを座標r,φを用いて表せ．
(2) この系のラグランジアンLを導け．
(3) 保存量を見つけて，それが保存量になっていることを示せ．
(4) 距離rのみを座標とする運動方程式を導出して，rが一定値r_0と等しくなり円運動が生じるときの$\dot{\varphi}$の値を求めよ．

[2] 剛体振子とは剛体の一点が空間に固定された点で支えられているもので，重力の作用により平衡点付近で周期的な揺動が生じる．剛体振子の鉛直面内の運動について調べたところ，次のラグランジアンが得られた．



$$L=\frac{1}{2}M(k^2+h^2)\dot{\theta}^2+Mgh\cos\theta$$

ここで，θは鉛直線を基準として表した振子の振れ角である．また，Mは剛体の質量であり，$M(k^2+h^2)$は剛体の支点まわりの慣性モーメント，hは剛体の重心と支点の距離，gは重力加速度である．

(1) 上記のラグランジアンLを参考にして，剛体の微小な揺動についての運動方程式が，調和振動子に相当する形式で近似されることを確認せよ．
(2) 時刻$t=0$において，振子は$\theta=\theta_0$で静止した状態から静かに開放されて揺動が生じた．振れ角θは微小として(1)で導いた運動方程式を用い，θを時刻tの関数として表現せよ．
(3) 支点の位置が$h=k/2$のときと揺動の周期が等しくなる別の支点までの距離h'を求めよ．周期が極小となる支点の位置を選んだとき，周期はいくらになるか．

次頁に[3]の出題がある．

［3］

（1）1次元運動のラグランジアン $L(q,\dot{q},t)$ に対してルジャンドル変換を用いると，独立変数の1つ $\dot{q}$ を p に変換することができる．こうして得られるハミルトニアン $H(q,p,t)$ を，p，q，$\dot{q}$，t 及び $L(q,\dot{q},t)$ のうちの必要なものを用いて書け．

（2）1次元運動に対するハミルトンの正準方程式を q，p 及び ハミルトニアン H を用いて書け（結果のみ書けばよい）．時間微分には $\dfrac{d}{dt}$ を用いること．

（3）1次元調和振動子（質量 m，振動数 ω）についての以下の問に答えよ．

(a) ハミルトニアン $H(q,p,t)$ を求めよ．

(b) 正準方程式を書け．

(c) 横軸 q，縦軸 p の位相空間内の運動の様子を図で示せ．全エネルギーを E とせよ．

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p$ 　 $L = \frac{1}{2}m\dot{q}_1^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q_1^2$

$= \frac{1}{2m}p^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q_1^2$

$\frac{p}{q_1}$ 　 $\frac{\dot{q}}{p}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{q_1}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_1}$

工業力学A

2009年7月27日
物216　8:45~10:15

1．ある系のラグランジアンLがつぎのように与えられたとする．ここで，x，$\dot{x}$は一般化座標と一般化速度であり，これ以外の記号は定数とする．

$$L=\frac{m}{2}\dot{x}^2-\frac{k}{2}x^2$$

$p_x = m\dot{x}$

1）一般化座標xに共役な運動量p_xを求めよ．

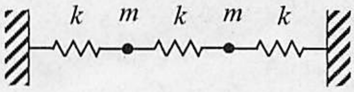
2）ハミルトン関数Hを求めよ．

3）位相平面上で系の運動はどのように表示されるか，図形を模式的に示して答えよ．

4）ハミルトンの正準方程式を導きなさい．

5）得られたハミルトン関数が時間的に変化するかどうかを調べよ．

2．質量の等しい二つの質点があり，図のように，ばね定数の等しい3つのばねで直線状に連結されている．最初は，ばねが自然長で，二つの質点はともに静止した状態にある．次にこの状態から質点に力を作用させ，その後の運動を調べる．質点は水平な直線上を運動するので重力の影響はないとして，系は摩擦力などの作用しない保存系と仮定する．



1) 一般化座標を設定し，質点が運動しているときの運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを数式で表現しなさい．一般化座標の設定を工夫すると，解析しやすくなることもある．

2) 運動方程式を導出しなさい．

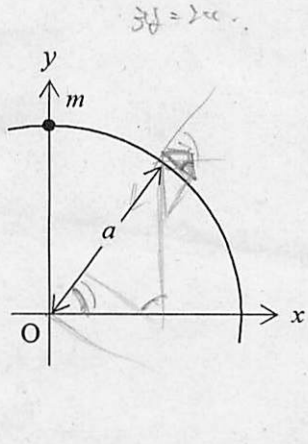
3) 基準振動の固有振動数を求めなさい．

$v^2 = 2g(a-h)$

$mg\frac{y}{a} = \frac{m2g(a-y)}{a}$

$3y = 2a$.

3．半径aの球の頂上から大きさの無視できる質量mの粒子が静かに滑り始める．球と粒子の間に摩擦力は作用しない．重力加速度はgとする．球の中心は原点Oにあり，x軸を水平方向，y軸を鉛直軸方向にすると，その後の質点の動きはx-y平面上の運動として扱える．



1) 粒子が球を離れないという条件のもとで運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを求めよ．

2) 球が粒子に及ぼす力をλとして運動方程式を導出せよ．

3) 粒子が球から離れる点の座標を求めよ．

工業力学A

2008年7月28日
物216　8:45～10:15

1．質点mは原点からの距離rに比例して，原点に向かう方向の引力$F=-C/r^2$の作用だけを受けて$x-y$平面上を運動している．

（1）質点mについてのラグランジアンLの例を示せ．
（2）ハミルトニアンHを導け．
（3）$x-y$座標から極座標に変換し，循環座標が生じるかどうか調べよ．
（4）距離rが一定の円運動$r=r_0$となるときの質点mの角運動量ℓを調べよ．
（5）この系の保存量にはどのようなものがあるか．

2．ラグランジアンLが次式で定義される系を考える．ここで，x_1,x_2,x_3は一般化座標，$\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3$は一般化速度とする．

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)$$

（1）ラグランジアンLがこのような形になる系を質点とばねの組み合わせで表現できないか検討せよ．可能な場合は質量，ばね定数の値や座標の取り方まで決定せよ．
（2）この系の固有振動数をすべて求めよ．
（3）点変換$q_1=x_1+x_2$，$q_2=x_1-x_2$によりラグランジアンをL'に変換せよ．

3．運動方程式

$$m\ddot{y}+mg=0$$

$-\left(\frac{C^2-2mk}{2}\right)+k$

に従う系において，力学変数Fを次のようにおく．

$$F=\frac{1}{2}m\dot{y}^2+mg\left(y+\frac{1}{2}gt^2\right)$$

（1）適当なラグランジアンLによると，オイラー・ラグランジュの方程式が上記の運動方程式と一致することを確かめよ．一般化座標はyとする．
（2）そのようなラグランジアンにより，yに共役な一般化運動量p_yを求めよ．
（3）ハミルトニアンHを求めよ．
（4）ポアソンの括弧式$[F,H]$を計算せよ．

工業力学A

2006年7月24日

1．図のように一様な剛体棒を鉛直にして水平な軸をつけ，微小な振幅で振子として揺動させる．棒の長さはlで線密度は定数ρとする．棒の質量は$M=\rho l$となる．支点Oと重心Gの距離をaとする．棒が鉛直軸となす角をθとする．角変位は微小と仮定する．重力加速度はgとおく．系は保存的とする．

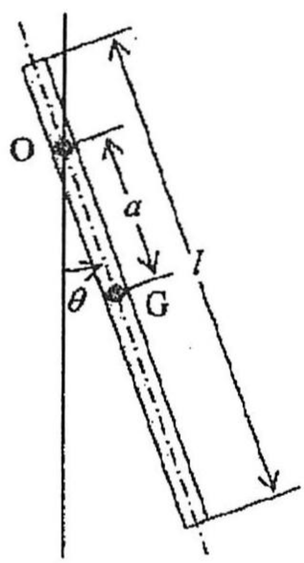
(1)　支点Oに関する剛体棒の慣性モーメントを求めよ．

(2)　剛体棒のポテンシャルエネルギーVを求めよ．

(3)　この系のラグランジアンをθと$\dot{\theta}$の関数Lとして求めて，θについての運動方程式を導出せよ．

(4)　棒の上端を支点とする場合($a=l/2$)の周期を計算せよ．周期がこの場合と等しくなるaの値をもうひとつ求めよ．

(5)　振子の周期が最短になるように軸の位置を決めてaの値で答えよ．最適なaで支点の位置を決めて周期が最小値となるとき，これと等しい周期になる単振子の長さを求めよ．



2．一般化座標q_1,q_2によって，ある力学系のラグランジアンLが次のように与えられている．

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-\frac{\omega^2}{4}(q_1^2-2q_1q_2+q_2^2)$$

(1)　ラグランジュの方程式を用いて，q_1,q_2についての運動方程式を導け．

(2)　一般化座標q_1,q_2と共役な一般化運動量p_1,p_2を求めよ．

(3)　ハミルトニアンHを求めて，正準方程式を導け．

(4)　力学変数uを$u=p_1+p_2$と定義する．ポアソンの括弧式$[u,H]$を計算せよ．この系においてuは保存量といってよいだろうか？

(5)　ハミルトニアンの時間微分dH/dtの値を求めよ．

[工業力学A] 西原

2004年7月26日
8:45～10:15
物313

1. 図1に示すように，半径 r の滑車にロープをかけて両側に質量 M, m のおもりを吊してある．滑車の回転軸まわりの慣性モーメントを I とする．重力加速度を g とする．

1) ラグランジュ関数を求めよ．

2) ラグランジュの方程式により運動方程式を導け．

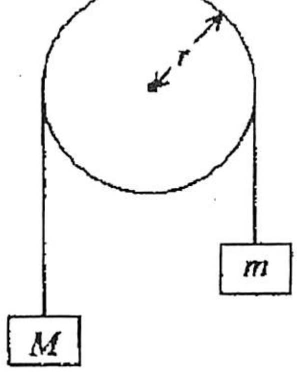


図1

2. ハミルトン関数が

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}k(q_x^2 + q_y^2)$$

で表される系において

$$\ell = q_x p_y - q_y p_x$$

と定義する．ここで，p_x と p_y は一般化座標 q_x と q_y に共役な一般化運動量とする．

1) 次式の値を計算せよ．

$$\frac{\partial \ell}{\partial q_x}\frac{\partial H}{\partial p_x} - \frac{\partial \ell}{\partial p_x}\frac{\partial H}{\partial q_x} + \frac{\partial \ell}{\partial q_y}\frac{\partial H}{\partial p_y} - \frac{\partial \ell}{\partial p_y}\frac{\partial H}{\partial q_y}$$

2) 時間微分 $d\ell / dt$ の値を求めよ．

3. 質量 M, m の二個の質点が，水平で滑らかなテーブルに開いた微小な孔を通る糸の両端に結ばれている．質点 m はテーブルの上を運動し，M は宙にぶらさがっている．M は鉛直方向にのみ運動すると仮定する．重力加速度は g とする．

1) 質量 M の質点が空間的に静止して，質量 m の方が円運動を続ける条件を調べよ．

2) 上記の状態から質量 M の質点に下方へ向けて微小な撃力が作用した後の運動を調べよ．

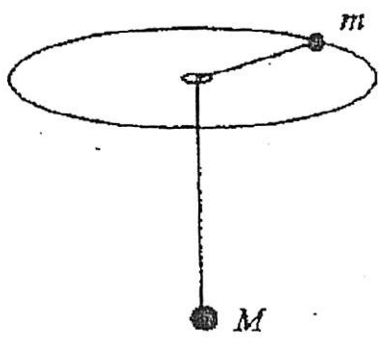


図2

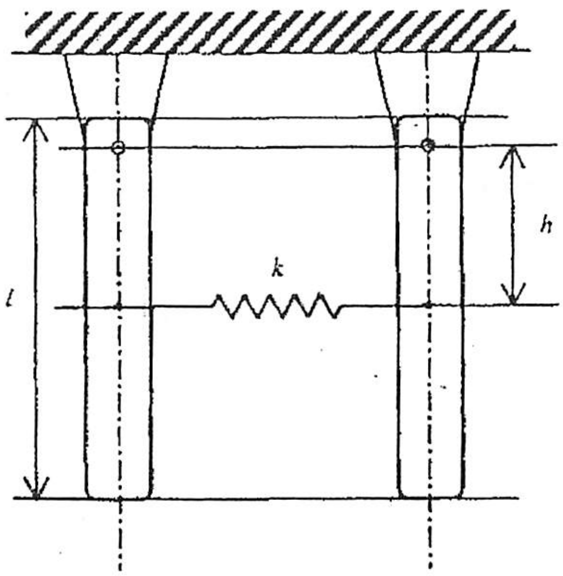
2522

[工業力学A]　西原

2003年7月28日
8:45〜10:15
物216

1．図のように質量 m で長さ l の二本の剛体棒が上端付近で支持されている．支点から重心までの距離を h，重心まわりの慣性モーメントは I とする．左右の剛体棒は重心のところでばね定数 k のばねを介して連結されている．ばねの質量は無視できるものとする．

1)　微小な振れ角の揺動について系のラグランジアンを求めよ．
2)　運動方程式を導け．
3)　基準振動の角振動数を求めよ．
4)　基準振動における左右の剛体棒の振幅比を求めよ．



2．次のハミルトニアンで記述される系において，p_r, p_θ は座標 r, θ に共役な一般化運動量とする．ここで m は粒子の質量，C は中心力場を表現する正の定数である．

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\theta^2\right)-\frac{C}{r}$$

$$p_r=m\dot{r},\quad p_\theta=mr^2\dot{\theta}$$

1)　一般化運動量 p_θ が一定になることを示せ．

2)　円運動に対応する $r=r_0$（定数）の場合について，公転の周期を求めよ．

3)　動径を $r=r_0+\rho$ とおいて，ρ が微小すると $\dot{p}_r$ が ρ にほぼ比例することを確かめよ．

1801