2009

1.

(1)

1)

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2$$

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ より、

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_x} = m\dot{x}$$

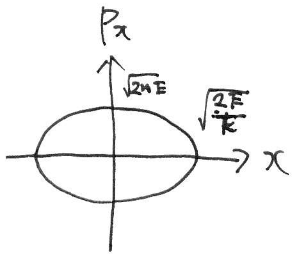
2)

1)より

$$H = \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{k}{2}x^2$$

3)

$$E = \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{k}{2}x^2 \qquad 1 = \frac{1}{2mE}p_x^2 + \frac{k}{2E}x^2$$



右図のような楕円を描く

4)

$$H(q_i, k, T) = k\dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, T) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} \qquad \frac{d\dot{q}_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

より $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_x} = \dfrac{p_x}{m} \qquad \dfrac{dp_x}{dt} = -kx$

5)

$$\frac{dH}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{dp_x}{dt}\right)$$

(p_x, x を通してのみ t に依存するため。)

$$= \left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p_x} - \frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{\partial H}{\partial x}\right) = 0$$

H は t に依存しない。

No.
Date

2.

1) 左から m_1, m_2 とする。それぞれの変位 x_1, x_2 とする

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$$
$$U = \frac{k}{2} x_1^2 + \frac{k}{2}(x_1 - x_2)^2 + \frac{k}{2}(x_2)^2$$

$$L = T - U$$
$$= \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2} x_1^2 - \frac{k}{2}(x_1 - x_2)^2 - \frac{k}{2}(x_2)^2$$

2)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$ より

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + kx_1 + k(x_1 - x_2) = 0 \\ m\ddot{x}_2 + kx_2 - k(x_1 - x_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2 \\ m\ddot{x}_2 = kx_1 \end{matrix}$$

3) $$K_{ij} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \quad C_{ij} = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \frac{2k}{m} & +\frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & \omega^2 - \frac{2k}{m} \end{vmatrix} = \left(\omega^2 - \frac{2k}{m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0$$

$$\left(\omega^2 - \frac{3k}{m}\right)\left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right) = 0$$

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{3k}{m}}, \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$$